数理解析研究所講究録
748巻 1991年 1-5

連立非線形方程式の大域における数値解法とその応用

徳島大学工学部数学教室　　篠原　能材 (Yoshitane SHINOHARA)

本研究は，理工学の諸分野に現れる非線形現象の数値解析において基本的な役割をはたす連立非線形方程式の大域における数値解法とその応用 について共同研究することを主目的とした．連立非線形方程式

$$\mathbb{F}(\mathbb{X})=\{f_k(x_1, x_2,\dots,x_m)\}=\mathbb{O},\quad k=1,2,\dots,m \tag{1}$$

のm次元Euclid空間のある有界領域$R=\{(x_1,x_2,\dots,x_m);a_k\leq x_k\leq b_k, k=1,2,\dots,m\}$ (a_k, b_kは定数)における全ての解を組織的に算出する大域的解法については，これを常微分方程式の解法に帰着させるideaが D.F.Davidenko[1] によって発表されていた．この論文では方程式系（１）がパラメータ　λを含む場合，即ち

$$f_k(x_1,x_2,\dots,x_m,\lambda)=0,\quad k=1,2,\dots,m \tag{2}$$

の形で論じられており，これをλで微分して，導関数$dx_r/d\lambda$ $(r=1,2,\dots,m)$に関する常微分方程式

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial f_k}{\partial x_r}\frac{dx_r}{d\lambda}=-\frac{\partial f_k}{\partial\lambda},\quad k=1,2,\dots,m \tag{3}$$

を導き，これを　離散化法で解くことを提案している．

他方，M.V.Rybashov[2] は，方程式系（１）において，一つの変数　x_p　をパラメータ　t に選び，ポテンシャル関数$V(\mathbb{X})$　を用いて作った常微分方程式

$$\frac{dx_i}{dt}=-\frac{\partial V(x_1,x_2,\dots,x_m)}{\partial t},\ t=x_p,\ i=1,2,\dots,p-1,p+1,\dots,m, \tag{4}$$

$$V(\mathbb{X})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}f_k^2$$

をアナログコンピュータを用いて解くことを提案している．

ところで，筆者［4］は，方程式系（1）からm－1個の方程式

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)=0, \quad j=1,2,\ldots,m-1 \tag{5}$$

を選び出し，これらが m次元Euclid空間 R^m のm－1個の曲面として定義する曲線C：$\mathcal{X}=\mathcal{X}(s)$（s は弧長）が満たす常微分方程式を Euler法 または Runge-Kutta法でStep-by-Step に解いて，この曲線Cを追跡し，残りの曲面 $f_m(\mathcal{X})=0$ との交点$\mathcal{X}$を順に求めて行く大域的な解法を提案した．ここではパラメータ s を曲線Cの弧長に選んだ点に特徴がある．この解法を，幾何学的解法(geometric method)または弧長法(arc-length method)という．

曲線C：$\mathcal{X}=\mathcal{X}(s)$（s は弧長）が満たす常微分方程式は，方程式系（5）を弧長sで微分すれば

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,\frac{dx_i}{ds}=0, \quad j=1,2,\ldots,m-1$$

となり，$\sum_{i=1}^{m}(dx_i/ds)^2=1$ だから

$$\frac{dx_i}{ds}=\lambda D_i, \quad i=1,2,\ldots,m \tag{6}$$

となる．ただし，

$$D_i=(-1)^i\,\frac{\partial(f_1,\ldots\ldots\ldots,f_{m-1})}{\partial(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)}, \quad \lambda=\mp\Big[\sum_{i=1}^{m}D_i^2\Big]^{-1/2}. \tag{7}$$

この幾何学的解法の FORTRAN プログラムを論文［5］で報告した．当時，恩師の占部 実教授は非線形振動解析の研究に精力を注いでおられ，ガレルキン法による近似理論［3］を完成させた．

ところで，周期的常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \quad X(x, t+2\pi)=X(x, t), \quad x \in R^d$$

の 2π 周期解 $x(t)$ の m 位のガレルキン近似

$$x_m(t)=\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

を実際に算出するためには，未定係数 $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ に関する連立非線形方程式

$$F_0(\alpha)\cong\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X[x_m(t), t]\, dt=0,$$

$$F_n(\alpha)\cong\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X[x_m(t), t]\cos nt\, dt - nb_n =0, \tag{8}$$

$$G_n(\alpha)\cong\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X[x_m(t), t]\sin nt\, dt +na_n =0,$$

$$\alpha=(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m), \quad n=1, 2, \ldots, m$$

を解かなければならない．この目的のためには，Davidenko法 や Rybashov法 はその儘では

使えなかった.

他方，我々の幾何学的解法は，充分にその目的を達成した．当時は，Duffingの 微分方程式

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = P\cos 2t, \quad (\cdot = d/dt,\ a,b,c \text{ は定数})$$

の１／２分数調波解 x(t) の数学的存在証明が与えられておらず，この存在証明を我々の幾何学的解法によるガレルキン近似の算出と占部の定理を併用することで確立した論文［6］を発表し，当時，京都大学数理解析研究所教授であった占部 実先生に喜んで頂いたのが忘れられない．この解法は，その後，E.Ikeno and A.Ushida[7]，F.Fujii[8] をはじめ諸先生方に発展的に展開して頂いて現在に至っている．この解法を礎に，更に発展さすべく，諸先生方の御協力を得て，この短期共同研究を実施した．この短期共同研究会(1990年11月13日~ 15日)の

第一 日は宮原是中（三井東圧化学）が化学工業における連立非線形方程式の数値解法の現状報告を行ない，藤井文夫（岐阜大・工）は土木工学の構造物系に現れる分岐現象の数値解析の報告，古川長太（九大・理）は Max型関数の最適化アルゴリズムの数理とその応用，五十嵐正夫（日大・農獣医）はニュートン法の停止則についての総合報告がなされた．

第二日は鳥居達生（名大・工）が Pade'近似による代数方程式の数値解法を紹介し，大石進一（早大・理工）は無限次元非線形システムの構成的解析法のホモトピー法や占部の定理の大域化について報告した．午後のSHORT COMMUNICATIONS においては，新谷尚義（広島大・学校教育），野田松太郎（愛媛大・工），山村清隆（群馬大・工），都田艶子（阪大・工）が研究分担課題に関連する研究活動についてその成果を報告した．

最終日の第三日は牛田明夫（徳島大・工），潮俊光（神戸女学院大・家政），水谷光（湘南工大）および田中衛（上智大・理工）が電気・電子回路に現れる非線形問題の数値解析とその応用例についての研究を報告した．

References

[1] Davidenko, D.F., On a new method of numerical solution of systems of nonlinear equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR 88(1953), 601-602.

[2] Rybashov, M.V., On a certain method for solving the global problem of searching for the roots of finite equations by means of an electronic simulator, Autom. Remote Contr. 23, 10(1963), 1311-1313.

[3] Urabe, M., Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, Arch. Rational Mech. Anal. 20(1965), 120-152.

[4] Shinohara, Y., A geometric method of numerical solution of nonlinear equations and error estimation by Urabe's proposition, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Series A, 5(1969), 1-9.

[5] Shinohara, Y., A geometric method for the numerical solution of nonlinear equations and its application to nonlinear oscillations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 8(1972), 13-42.

[6] Shinohara, Y., Numerical investigation of 1/2-subharmonic solution to Duffing's equation, Memoirs of Numerical Mathematics No. 1(1974), 21-41.

[7] Ikeno, E. and Ushida, A., The arc-length method for the computation of characteristic curves, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-23(1976), 181-183.

[8] Fujii, F., Scheme for elasticas with snap-back and looping, Journal of Engineering Mechanics, 10(1989), 2166-2181.